第７講　ベクトル

1　［1］　短針の長さが1，長針の長さが2の時計がある．短針を$\vec{a}$，長針を$\vec{b}$とするとき，点$(|\vec{a}+\vec{b}|,\ \vec{a}\cdot\vec{b})$の動く範囲を求め，それを図示せよ．

［2］　平面上に点Oを中心とする半径5の円がある．その周上に4点A，B，C，Dがこの順序にあり，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=-\overrightarrow{\mathrm{OD}}$が成り立つ．線分ACとBDの交点をPとし，$\angle\mathrm{APB}=\theta$とする．線分ABとDCの長さをそれぞれ4，5として，次の値を求めよ．

(1)　内積 $\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}$

(2)　$\cos\theta$

(3)　内積 $\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{DC}}$

【Point Pickup】

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

＜ Note ＞

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

2　四角形OABCは辺OAを下底，辺CBを上底とし，∠AOCと∠OABが等しい等脚台形である．

$a=|\overrightarrow{OA}|$，$c=|\overrightarrow{OC}|$，$m=\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OC}$とおく．

(1) $m<\dfrac{a^2}{2}$が成り立つことを示せ．

(2) 等脚台形OABCの面積Sをa，c，mを用いて表せ．

(3) 対角線OBとACの交点をDとするとき，$\overrightarrow{OD}$を$\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{OC}$を用いて表せ．

【Point Pickup】

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

< Note >

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

3 点 $(7,\ 6,\ 4)$ を中心とする半径 3 の球があり，その表面は鏡でできているものとする．いま，方向ベクトル $(3,\ 2,\ 1)$ をもつ光が原点から発射されたとする．この光は球に到達し，到達点で反射した後，xy 平面を貫通するとする．このとき，その反射点と xy 平面を貫通した点の座標をそれぞれ求めよ．ただし，球面での光の反射はその点での法線（球の中心とその点を通る直線）と入射光線を含む平面内で起こり，入射角と反射角は等しいとする．

【Point Pickup】

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

＜ Note ＞

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第７講　ベクトル

1　[1]　短針の長さが 1，長針の長さが 2 の時計がある．短針を $\vec{a}$，長針を $\vec{b}$ とするとき，点$(|\vec{a}+\vec{b}|,\ \vec{a}\cdot\vec{b})$の動く範囲を求め，それを図示せよ．

$|\vec{a}|=1,\ |\vec{b}|=2$　$\vec{a}$，$\vec{b}$のなす角を $\theta\,(0\leqq\theta\leqq\pi)$ とすると　$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta=2\cos\theta$

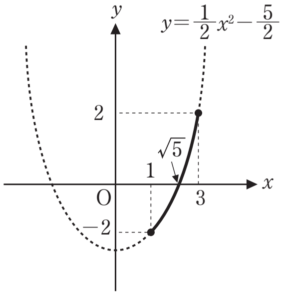
$$|\vec{a}+\vec{b}|^2=|\vec{a}|^2+2\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2=1+4\cos\theta+4=5+4\cos\theta$$

$|\vec{a}+\vec{b}|=X$，$\vec{a}\cdot\vec{b}=Y$ とすると　$X^2=5+4\cos\theta$，$Y=2\cos\theta$　　よって　$Y=\frac{1}{2}X^2-\frac{5}{2}$

また，$-1\leqq\cos\theta\leqq1$ より　$-2\leqq Y\leqq2$　さらに　$X>0$

よって，求める軌跡は右図．

つまり　$\boldsymbol{y=\frac{1}{2}x^2-\frac{5}{2}}$　の $\boldsymbol{1\leqq x\leqq3}$ の部分である．

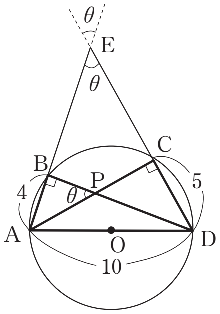


1　[2]　平面上に点 O を中心とする半径 5 の円がある．その周上に 4 点 A，B，C，D がこの順序にあり，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=-\overrightarrow{\mathrm{OD}}$ が成り立つ．線分 AC と BD の交点を P とし，$\angle\mathrm{APB}=\theta$ とする．線分 AB と DC の長さをそれぞれ 4，5 として，次の値を求めよ．

(1)　内積 $\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}$　　(2)　$\cos\theta$　　(3)　内積 $\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{DC}}$

$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=-\overrightarrow{\mathrm{OD}}$より，点 A，D は直径の両端である．

よって　$\angle\mathrm{ABD}=\angle\mathrm{ACD}=90^\circ$



(1)　$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}=-\overrightarrow{\mathrm{AO}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}=-|\overrightarrow{\mathrm{AO}}||\overrightarrow{\mathrm{AB}}|\cos\angle\mathrm{BAD}$

$$=-5\times4\times\frac{\mathrm{AB}}{\mathrm{AD}}=\boldsymbol{-8}$$

(2)　$\triangle\mathrm{ABP}$ で　$\theta=180^\circ-90^\circ-\angle\mathrm{BAP}=90^\circ-\angle\mathrm{BAP}$

$$\cos\theta=\cos(90^\circ-\angle\mathrm{BAP})=\sin\angle\mathrm{BAP}$$

ここで　$\angle\mathrm{BAP}=\angle\mathrm{BAD}-\angle\mathrm{CAD}=\angle\mathrm{BAD}-30^\circ$　より

$$\cos\theta=\sin(\angle\mathrm{BAD}-30^\circ)=\sin\angle\mathrm{BAD}\cos30^\circ-\cos\angle\mathrm{BAD}\sin30^\circ$$

$$=\frac{\sqrt{21}}{5}\times\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{2}{5}\times\frac{1}{2}=\boldsymbol{\frac{3\sqrt{7}-2}{10}}$$

(3)　直線 AB と CD の交点を E とすると，$\triangle\mathrm{ABP}\backsim\triangle\mathrm{ACE}$ より，$\angle\mathrm{AED}=\theta$

よって，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}$と$\overrightarrow{\mathrm{DC}}$のなす角は θ である．　ゆえに　$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{DC}}=4\times5\times\cos\theta=\boldsymbol{6\sqrt{7}-4}$

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

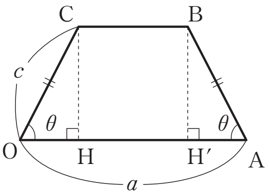
2　四角形OABCは辺OAを下底，辺CBを上底とし，∠AOCと∠OABが等しい等脚台形である．$a=|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|$，$c=|\overrightarrow{\mathrm{OC}}|$，$m=\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ とおく．

(1)　$m<\dfrac{a^2}{2}$ が成り立つことを示せ．

(2)　等脚台形OABCの面積 S を a，c，m を用いて表せ．

(3)　対角線OBとACの交点をDとするとき，$\overrightarrow{\mathrm{OD}}$を$\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}$を用いて表せ．

(1)　∠AOC$=\theta$ とおくと　$m=ac\cos\theta$



ここでC，BからAOに下ろした垂線の足をそれぞれH，H′とすると，$m=a\times\mathrm{OH}$ である．

$\mathrm{OH}+\mathrm{AH'}<a$ であり，$\mathrm{OH}=\mathrm{AH'}$ より　$2\mathrm{OH}<a$

よって　$\mathrm{OH}<\dfrac{a}{2}$　　ゆえに　$m=a\times\mathrm{OH}<a\times\dfrac{a}{2}=\dfrac{a^2}{2}$　より示された．

(2)　$m=ac\cos\theta$　より　$\cos\theta=\dfrac{m}{ac}$　　$\sin\theta=\sqrt{1-\dfrac{m^2}{a^2c^2}}=\dfrac{\sqrt{a^2c^2-m^2}}{ac}$

$$\mathrm{BC}=\mathrm{HH'}=a-2\mathrm{OH}=a-2c\cos\theta=a-\frac{2m}{a}\quad(0<\theta<90^\circ)$$

ゆえに　$S=\dfrac{1}{2}(\mathrm{OA}+\mathrm{BC})\times\mathrm{CH}=\left(a-\dfrac{m}{a}\right)\times c\times\dfrac{\sqrt{a^2c^2-m^2}}{ac}=\boldsymbol{\dfrac{(a^2-m)\sqrt{a^2c^2-m^2}}{a^2}}$

(3)　$\overrightarrow{\mathrm{OD}}=k\overrightarrow{\mathrm{OB}}=k\left(\overrightarrow{\mathrm{OC}}+\overrightarrow{\mathrm{CB}}\right)=k\left(\overrightarrow{\mathrm{OC}}+\dfrac{\mathrm{BC}}{\mathrm{OA}}\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right)=k\overrightarrow{\mathrm{OC}}+\dfrac{a^2-2m}{a^2}k\overrightarrow{\mathrm{OA}}$

DはAC上より　$k+\dfrac{a^2-2m}{a^2}k=1$　　$\left(1+\dfrac{a^2-2m}{a^2}\right)k=1$　　$k=\dfrac{a^2}{2(a^2-m)}$　$(a^2\neq m)$

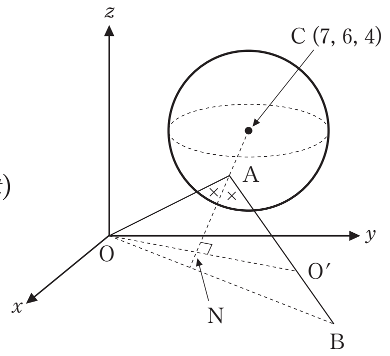
ゆえに　$\boldsymbol{\overrightarrow{\mathrm{OD}}=\dfrac{a^2-2m}{2(a^2-m)}\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\dfrac{a^2}{2(a^2-m)}\overrightarrow{\mathrm{OC}}}$

【別解】　△OAD ∽△BCD より　$\mathrm{CD}:\mathrm{DA}=\mathrm{BC}:\mathrm{OA}=\dfrac{a^2-2m}{a}:a=a^2-2m:a^2$

ゆえに　$\boldsymbol{\overrightarrow{\mathrm{OD}}=\dfrac{a^2-2m}{2(a^2-m)}\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\dfrac{a^2}{2(a^2-m)}\overrightarrow{\mathrm{OC}}}$

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

3　点 (7, 6, 4) を中心とする半径 3 の球があり，その表面は鏡でできているものとする．いま，方向ベクトル (3, 2, 1) をもつ光が原点から発射されたとする．この光は球に到達し，到達点で反射した後，xy 平面を貫通するとする．このとき，その反射点と xy 平面を貫通した点の座標をそれぞれ求めよ．ただし，球面での光の反射はその点での法線（球の中心とその点を通る直線）と入射光線を含む平面内で起こり，入射角と反射角は等しいとする．



球の中心を C とする．

題意の球面の方程式は　$(x-7)^2+(y-6)^2+(z-4)^2=9$

入射光線の方向ベクトルは (3, 2, 1) より，反射点を A とすると

$\overrightarrow{OA}=t(3,\ 2,\ 1)=(3t,\ 2t,\ t)$　　よって　$A(3t,\ 2t,\ t)$

これが球面上にあるので　$(3t-7)^2+(2t-6)^2+(t-4)^2=9$

$7t^2-37t+46=0$　　$t=\dfrac{23}{7},\ 2$　よって，反射点 A は

$t=2$ のときの **(6, 4, 2)** である．

次に，反射光線が xy 平面を貫通した点 B について，O を直線 AC に関して対称移動した点を O′ とすると $\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OA}+s\overrightarrow{AO'}$ とおけ，その z 成分が 0 である．

ここで，直線 AC に O から下ろした垂線の足を N とすると

$\overrightarrow{ON}=\overrightarrow{OC}+k\overrightarrow{CA}=(7,\ 6,\ 4)+k(-1,\ -2,\ -2)=(-k+7,\ -2k+6,\ -2k+4)$

$\overrightarrow{ON}\perp\overrightarrow{AC}$　より　$(-k+7)+2(-2k+6)+2(-2k+4)=0$　　$k=3$

よって　$\overrightarrow{ON}=(4,\ 0,\ -2)$　であり　$\overrightarrow{OO'}=2\overrightarrow{ON}=(8,\ 0,\ -4)$　より　$O'(8,\ 0,\ -4)$

ゆえに　$\overrightarrow{OB}=(6,\ 4,\ 2)+s(2,\ -4,\ -6)=(2s+6,\ -4s+4,\ -6s+2)$

この z 成分が 0 より　$-6s+2=0$　　$s=\dfrac{1}{3}$

したがって　$\overrightarrow{OB}=\left(\dfrac{20}{3},\ \dfrac{8}{3},\ 0\right)$　　よって，貫通点 B は $\left(\dfrac{20}{3},\ \dfrac{8}{3},\ 0\right)$ である．

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

1　平面上の3点O，A，BがOA＝5，OB＝3，∠AOB＝θ $(0<\theta<\pi)$ を満たしている．∠AOBの二等分線上の点Cを$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\perp\overrightarrow{\mathrm{AC}}$となるようにとる．

(1)　$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{c}$とおくとき，$\vec{c}=p\vec{a}+q\vec{b}$（$p$，$q$は実数）と表すことができる．$p$，$q$を$\theta$を用いて表せ．

(2)　$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\parallel\overrightarrow{\mathrm{BC}}$のとき，$\cos\theta$を求めよ．

(3)　(2)のとき，四角形OACBの面積を求めよ．

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

2　点 $(-1,\ -1,\ 2)$ を通り，方向ベクトルが $(2,\ 1,\ 2)$ である直線を g とする．また点 $\mathrm{A}(-3,\ 0,\ 2)$ と g を含む平面を α とする．次の各問いに答えよ．

(1) 点 A から g に下ろした垂線と g との交点を H とする．点 H の座標を求めよ．

(2) 点 A と g との距離を求めよ．

(3) 点 $(-2m-7,\ 2m+3,\ -3m+4)$ が α 上にあるとき，m の値を求めよ．

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

1 平面上の3点O, A, BがOA=5, OB=3, ∠AOB=θ $(0<\theta<\pi)$ を満たしている．∠AOBの二等分線上の点Cを$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\perp\overrightarrow{\mathrm{AC}}$となるようにとる．

(1) $\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$, $\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$, $\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{c}$とおくとき，$\vec{c}=p\vec{a}+q\vec{b}$ (p, qは実数) と表すことができる．p, qをθを用いて表せ．

(2) $\overrightarrow{\mathrm{OA}}\,/\!/\,\overrightarrow{\mathrm{BC}}$のとき，$\cos\theta$を求めよ．

(3) (2)のとき，四角形OACBの面積を求めよ．

解答例

(1) 直線OCと線分ABの交点をPとすると，角の二等分線の性質より

$\mathrm{AP}:\mathrm{BP}=\mathrm{OA}:\mathrm{OB}=5:3$　よって　$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\frac{3}{8}\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\frac{5}{8}\overrightarrow{\mathrm{OB}}$　と表され

$\vec{c}=k'\left(\frac{3}{8}\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\frac{5}{8}\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right)=k(3\vec{a}+5\vec{b})$　(k, k'は実数)　とおくことができる．

$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\perp\overrightarrow{\mathrm{AC}}$　より　$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}=0$

$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\vec{a}\cdot(\vec{c}-\vec{a})=\vec{a}\cdot(3k\vec{a}+5k\vec{b}-\vec{a})=3k|\vec{a}|^2+5k\vec{a}\cdot\vec{b}-|\vec{a}|^2=0$

$|\vec{a}|=5$, $|\vec{b}|=3$, $\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta=5\times3\times\cos\theta$　より

$3k\times5^2+5k\times5\times3\times\cos\theta-5^2=0$　　$3(1+\cos\theta)k=1$

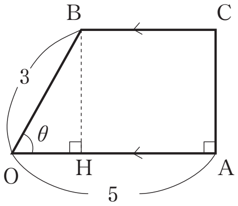
$0<\theta<\pi$ より　$1+\cos\theta\neq0$　　よって　$k=\frac{1}{3(1+\cos\theta)}$

したがって　$\vec{c}=\frac{1}{1+\cos\theta}\vec{a}+\frac{5}{3(1+\cos\theta)}\vec{b}$　と表される．

これを，$\vec{c}=p\vec{a}+q\vec{b}$と比較して　$\boldsymbol{p=\frac{1}{1+\cos\theta}}$, $\boldsymbol{q=\frac{5}{3(1+\cos\theta)}}$

(2) $\overrightarrow{\mathrm{BC}}=\vec{c}-\vec{b}=p\vec{a}+(q-1)\vec{b}$　　$\vec{a}\,/\!/\,\overrightarrow{\mathrm{BC}}$より $q-1=0$

つまり　$\frac{5}{3(1+\cos\theta)}=1$　　ゆえに　$\boldsymbol{\cos\theta=\frac{2}{3}}$



(3) $0<\theta<\pi$ より　$\sin\theta=\frac{\sqrt{5}}{3}$

BからOAに下ろした垂線の足をHとすると

$\mathrm{BH}=\mathrm{OB}\sin\theta=3\times\frac{\sqrt{5}}{3}=\sqrt{5}$　　$\mathrm{BC}=\mathrm{OA}-\mathrm{OH}=5-\mathrm{OB}\cos\theta=5-3\times\frac{2}{3}=3$

ゆえに，求める台形の面積は　$\frac{1}{2}(\mathrm{BC}+\mathrm{OA})\times\mathrm{AC}=\frac{1}{2}(3+5)\times\sqrt{5}=\boldsymbol{4\sqrt{5}}$

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

2　点 $(-1,\ -1,\ 2)$ を通り，方向ベクトルが $(2,\ 1,\ 2)$ である直線を g とする．また点 $\mathrm{A}(-3,\ 0,\ 2)$ と g を含む平面を α とする．次の各問いに答えよ．

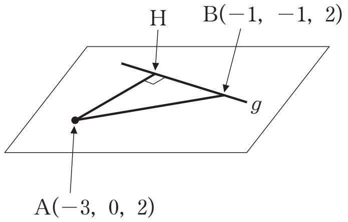
(1)　点Aから g に下ろした垂線と g との交点をHとする．点Hの座標を求めよ．

(2)　点Aと g との距離を求めよ．

(3)　点 $(-2m-7,\ 2m+3,\ -3m+4)$ が α 上にあるとき，m の値を求めよ．

解答例

$\mathrm{B}(-1,\ -1,\ 2)$，$\vec{d}=(2,\ 1,\ 2)$とする．



(1)　直線 g 上の点Pは

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}+k\vec{d}=(-1,\ -1,\ 2)+k(2,\ 1,\ 2)$$
$$=(2k-1,\ k-1,\ 2k+2)$$

と表すことができる．　**直線のベクトルによる表現**

よって　$\mathrm{H}(2k-1,\ k-1,\ 2k+2)$ とおく．

また，$\mathrm{AH}\perp g$ より　$\overrightarrow{\mathrm{AH}}\cdot(2,\ 1,\ 2)=0$

$\overrightarrow{\mathrm{AH}}=(2k+2,\ k-1,\ 2k)$ より　$2\times(2k+2)+1\times(k-1)+2\times 2k=0$　　$k=-\dfrac{1}{3}$

ゆえに　$\mathbf{H}\left(-\dfrac{5}{3},\ -\dfrac{4}{3},\ \dfrac{4}{3}\right)$

(2)　点Aと g との距離はAHの長さである．

$$\overrightarrow{\mathrm{AH}}=\left(\frac{4}{3},\ -\frac{4}{3},\ -\frac{2}{3}\right)=\frac{2}{3}(2,\ -2,\ -1)$$

ゆえに，求める距離は　$|\overrightarrow{\mathrm{AH}}|=\dfrac{2}{3}\sqrt{4+4+1}=\dfrac{2}{3}\times 3=\mathbf{2}$

(3)　平面 α 上の点Qについて

$$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\left(s\overrightarrow{\mathrm{AB}}+t'\overrightarrow{\mathrm{AH}}\right)=(-3,\ 0,\ 2)+s(2,\ -1,\ 0)+t(2,\ -2,\ -1)$$
$$=(2s+2t-3,\ -s-2t,\ -t+2)$$

と表すことができる．

よって，点 $(-2m-7,\ 2m+3,\ -3m+4)$ が α 上にあるとき

$$\begin{cases}-2m-7=2s+2t-3 & \cdots\cdots①\\ 2m+3=-s-2t & \cdots\cdots②\\ -3m+4=-t+2 & \cdots\cdots③\end{cases}$$

①，②より　$t=-m-1$　　③より　$t=3m-2$

よって　$-m-1=3m-2$　より　$\boldsymbol{m=\dfrac{1}{4}}$

$\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ と行くことで平面 α 上に移動することができる．よって平面上の２ベクトルの１次結合の形により平面上の任意の点が表現できる．ここで，$\overrightarrow{\mathrm{AH}}=\left(\frac{4}{3},-\frac{4}{3},-\frac{2}{3}\right)$ をそのまま用いると「分数」となるため，これを伸縮させた $(2,\ -2,\ -1)$ を用いた．

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。